

Massimo comun divisore e minimo comune multiplo di numeri naturali

Obiettivi

Comprendere il significato di massimo comun divisore e minimo comune multiplo e utilizzarlo in contesti non strettamente matematici.

Ostacoli concettuali da tenere in considerazione

Spesso gli allievi conoscono meccanicamente l'algoritmo per il calcolo del mcm e del MCD, ma non riescono a cogliere il significato di tali operatori e faticano a usarli strumentalmente nella risoluzione dei problemi.

La lezione

L'attività parte dal problema:

MATEMATICA E... REALTÀ Tre agenti di commercio, Aldo, Bruno e Carlo, si ritrovano a Roma il 19 aprile. Se Aldo va a Roma ogni 12 giorni, Bruno ogni 15 e Carlo ogni 20, dopo quanti giorni si ritroveranno a Roma? Quale giorno sarà? [60 giorni; 18 giugno]

La lezione è pensata nelle seguenti fasi per una durata complessiva di 2 ore.

Fase		Tempi
1	L'insegnante presenta alla classe il problema: legge ad alta voce l'esercizio e propone alla classe la Scheda 1.	5 minuti
2	Gli studenti lavorano a piccoli gruppi omogenei (2/3) sulla Scheda 1.	40 minuti
3	Al termine il docente riassume e sistematizza i risultati appresi.	15 minuti
4	Gli studenti lavorano a gruppi sulla Scheda 2.	40 minuti
5	Al termine il docente riassume e sistematizza i risultati.	20 minuti

Eventuale approfondimento

- È possibile proporre agli studenti una dimostrazione che riguarda i multipli di un numero. Ad esempio:

Considera tre numeri naturali a , b e c . È sempre vero che se $a \cdot b$ è multiplo di c e a non è multiplo di c , allora b è multiplo di c ?

- È infine possibile lavorare su quesiti INVALSI relativi agli argomenti trattati.

Materiali di lavoro

- Scheda 1 – Scheda di lavoro per lo studente
- Scheda 1 – Note per l'insegnante
- Scheda 2 – Scheda di lavoro per lo studente

• *Scheda 1 – Scheda di lavoro per lo studente*

MATEMATICA E... REALTÀ Tre agenti di commercio, Aldo, Bruno e Carlo, si ritrovano a Roma il 19 aprile. Se Aldo va a Roma ogni 12 giorni, Bruno ogni 15 e Carlo ogni 20, dopo quanti giorni si ritroveranno a Roma? Quale giorno sarà? [60 giorni; 18 giugno]

Apri un file GeoGebra lasciando attive la Vista Grafica, il Foglio di Calcolo e la Vista Algebra. Rimpicciolisci la Vista Grafica e chiedi che non vengano visualizzati gli assi cartesiani.

Rappresenta nella Vista Grafica tre slider che chiamerai a , b e c . Imponi che per ognuno dei tre l'intervallo di variazione sia da 1 a 100 con passo 1.

Nella cella A2 digita $=a$, che cosa appare?

Nella cella A3 digita $=b$ e nella cella A4 digita $=c$. Che cosa appare? Perché?

Prova a muovere gli slider con il mouse e osserva i valori che possono assumere le tre variabili a , b , c . Scrivi nella cella B1 il nome di Aldo, nella cella C1 il nome di Bruno e nella cella D1 il nome di Carlo.

Ora si vuole scrivere nelle colonne B, C e D dopo quanti giorni, a partire dal primo incontro, ognuno dei tre agenti di commercio ritornerà a Roma. Scrivi in B2 il valore 0 che rappresenta il 19 aprile, il giorno del primo incontro. Imposta in B3 una formula che ti consenta di calcolare correttamente i giorni della prossima venuta a Roma di Aldo e trascina la formula in modo da prendere in considerazione una ventina di visite a Roma da parte di Aldo. (Ricorda che nel Foglio di Calcolo le formule devono essere scritte con il simbolo $=$ davanti).

Procedi allo stesso modo per Bruno e Carlo. Quali formule hai impostato?

Ora rispondi alle domande e, dopo aver discusso all'interno del gruppo, trascrivi le risposte sul foglio.

- Dopo quanti giorni si ritroveranno a Roma i tre agenti di commercio?
- Succederà una volta soltanto o si incontrano più volte tutti e tre? Se si incontrano più volte, quante?
- Può succedere che si incontrino solamente due dei tre agenti a Roma? Chi? Ogni quanto?
- Se Aldo e Carlo non vogliono incontrarsi mai, ogni quanti giorni devono andare a Roma?

Ora imposta nella Vista Algebra la scomposizione in fattori primi dei tre numeri a , b , c : nella Barra di inserimento scrivi $\text{fatt_a}=\text{FattoriPrimi}[a]$; comparirà una lista di numeri, appunto i fattori primi. Osserva la differenza di rappresentazione rispetto alle usuali scomposizioni in fattori primi: anziché scrivere, per esempio, $2^2 \cdot 3$, GeoGebra scrive $\{2, 2, 3\}$.

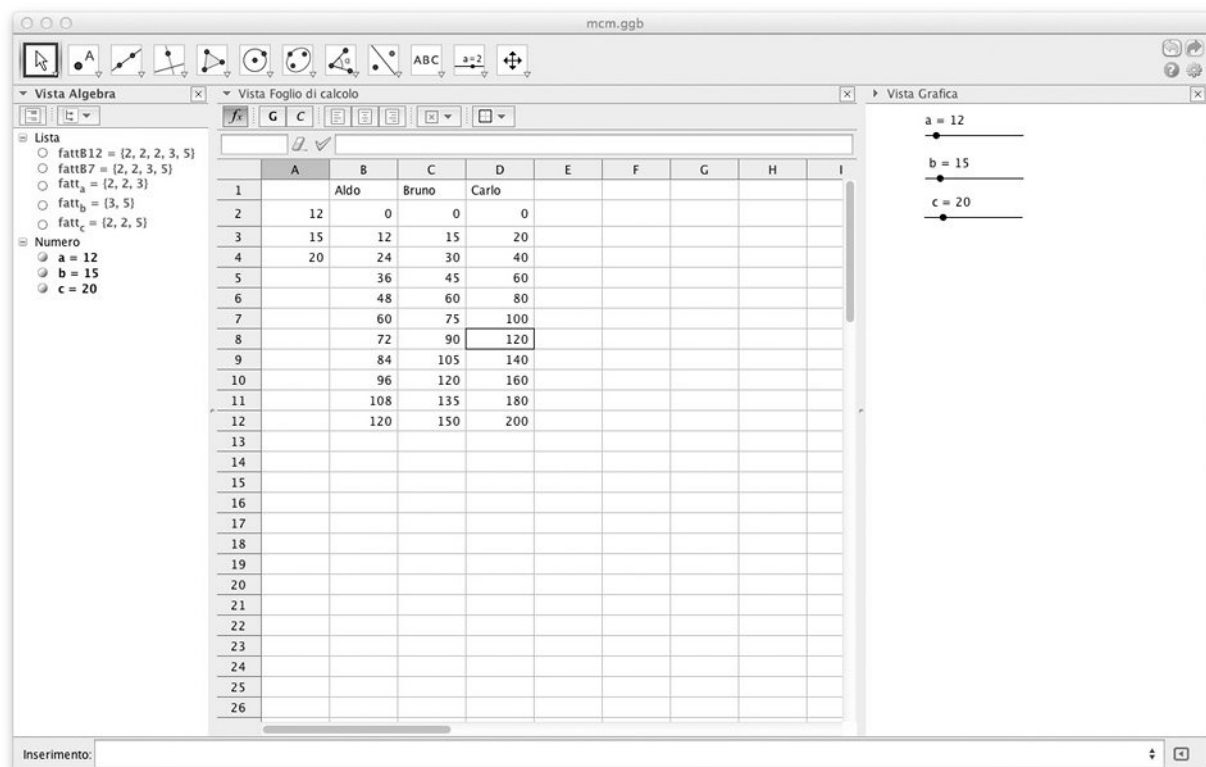
Ripeti la stessa operazione con i valori b e c : $\text{fatt_b}=\text{FattoriPrimi}[b]$ e $\text{fatt_c}=\text{FattoriPrimi}[c]$.

Quale relazione noti tra i fattori dei tre numeri e il risultato del problema? Prova a scomporre anche il risultato in fattori primi. Che cosa osservi?

Riporta la situazione ai valori iniziali: $a = 12$, $b = 15$, $c = 20$. Chiedi di scomporre in fattori primi i valori contenuti nelle celle B7 e B12, che cosa osservi? Perché?

- *Scheda 1 – Note per l'insegnante*

La schermata del file GeoGebra è la seguente:



La formula per calcolare ogni quanti giorni Aldo si reca a Roma è “=B2+\$A\$2” dove il simbolo \$ indica un riferimento assoluto.

Il fatto di variare i valori di a , b e c con gli slider può aiutare lo studente a confrontare registri differenti e può essere un primo approccio non esplicito al concetto di variabile.

Si può osservare con gli studenti la scomposizione in fattori primi con l'elenco dei fattori. È possibile notare il legame con il minimo comune multiplo e con un multiplo comune, ma non il minimo.

Volendo, i comandi per calcolare automaticamente con GeoGebra il mcm e il MCD sono, rispettivamente, $\text{mcm}\{a, b, c\}$ e $\text{MCD}\{a, b, c\}$.

- *Scheda 2 – Scheda di lavoro per lo studente*

L'algoritmo di Euclide per trovare il MCD

Si considerino due numeri naturali, entrambi diversi da zero. Per calcolare il MCD secondo l'algoritmo di Euclide si procede per passi eseguendo delle divisioni successive: si esegue una divisione approssimata (divisione con resto) tra il numero più grande e il più piccolo e si considera il resto: se questo è nullo allora vuol dire che il MCD corrisponde all'ultimo divisore utilizzato, altrimenti si prosegue con un'altra divisione con resto tra il divisore di prima e il resto appena individuato. Nuovamente si controlla il resto: se non è zero si prosegue con un'altra divisione, altrimenti il processo termina.

Apri GeoGebra e visualizza il Foglio di calcolo e la Vista Grafica.

Inserisci nella Vista Grafica due slider che chiamerai a e b ; imponi che il loro valore vari da 1 a 100 con passo 1.

Imposta il Foglio di calcolo in modo che nella cella A1 compaia scritto il numero maggiore tra a e b e nella cella A2 l'altro numero: nella cella A1 digita $=MAX[a,b]$ e nella cella A2 digita $=MIN[a,b]$.

Ora inizia con l'algoritmo: controlla se il divisore è diverso da zero e, se è così, calcola il resto della divisione. La sintassi che devi scrivere in GeoGebra nella cella A3 è $=SE[A2 < > 0, resto[A1,A2],A2]$.

Trascina la formula appena scritta verso il basso.

Prova a calcolare il MCD di alcune coppie di numeri naturali e fai attenzione ai risultati intermedi.

Rispondi alle seguenti domande e, dopo aver discusso all'interno del gruppo, trascrivi le risposte sul foglio.

- L'algoritmo così composto sarà sempre applicabile a qualsiasi coppia di numeri naturali che si possa prendere in considerazione? Perché?
- Calcola il MCD tra due numeri primi: l'algoritmo funziona?
- Utilizzando il file che hai costruito, verifica se è vera la seguente frase: dati due numeri scritti nella forma n e $n + 1$, essi sono sempre primi tra loro. Motiva la risposta.

Quesiti tratti dalle Prove INVALSI relativi all'argomento**Prova Nazionale 2010/11****Quesito D5**

- D5. Giovanni e Caterina si stanno allenando in piscina. Nuotano entrambi alla stessa velocità ma Giovanni ha cominciato più tardi ad allenarsi. Quando Giovanni ha fatto 10 vasche, Caterina ne ha fatte 30. Al termine dell'allenamento Giovanni ha fatto 50 vasche; quante ne ha fatte Caterina?

Risposta:

Prova di matematica Classe I scuola secondaria di primo grado 2012/13**Quesito D4**

- D4. Marta e il nonno camminano insieme lungo un sentiero. Ogni 2 passi fatti dal nonno, Marta ne fa 3 per restargli al fianco. Quando il nonno ha fatto 40 passi, quanti passi ha fatto Marta?



- ☐ a 80 ☐ b 60 ☐ c 40 ☐ d 20

Prova di matematica Classe II scuola secondaria di secondo grado 2012/13**Quesito D2**

- D2. La stampante laser L in un minuto stampa il triplo delle pagine della stampante deskjet D. Quando L e D lavorano contemporaneamente stampano in tutto 24 pagine al minuto. Se D viene sostituita con una stampante laser identica a L, quante pagine potranno essere stampate complessivamente in un minuto?

- ☐ a 24 ☐ b 30 ☐ c 36 ☐ d 48

Quesito D18

- D18. In un quartiere di una città, il calendario della raccolta differenziata (carta, vetro e plastica) prevede che la raccolta della carta avvenga ogni 28 giorni, quella del vetro ogni 21 giorni e quella della plastica ogni 14 giorni. Oggi sono state effettuate le raccolte di carta, vetro e plastica.

La prossima volta in cui la raccolta di carta, vetro e plastica verrà fatta contemporaneamente sarà tra giorni.