Proporzionalità diretta

Obiettivi

Saper riconoscere in contesti diversi la relazione di proporzionalità diretta e saperla rappresentare:

- con un insieme di coppie numeriche $(x; y)$, individuando il rapporto costante $\frac{y}{x}$;
- attraverso una formula algebrica di tipo $y = k \cdot x$;
- graficamente, sul piano cartesiano con una retta passante per l'origine.

Ostacoli concettuali da tenere in considerazione

Nella realtà si incontrano molto spesso fenomeni modellizzabili che si possono rappresentare attraverso una relazione di proporzionalità diretta. Per lo più alla crescita della variabile indipendente è associata la crescita della variabile dipendente. Bisogna far comprendere agli allievi che:

1. non tutte le situazioni in cui crescono sia la variabile indipendente che la variabile dipendente sono associabili alla proporzionalità diretta;
2. nella relazione di proporzionalità diretta può succedere che al crescere della variabile indipendente si associ la decrescita della variabile dipendente (costante di proporzionalità negativa).

La lezione

L'attività parte dall'analisi di una tabella numerica contestualizzata in una situazione reale che esplora la relazione esistente fra i pesi applicati a una molla e i relativi allungamenti.
La lezione è articolata nelle seguenti fasi per una durata complessiva di 2 ore e 30 minuti:

Fase		Tempi
1	L'insegnante presenta alla classe il problema; sarebbe opportuno allestire in classe l'esperienza di allungamento di una molla, magari con la collaborazione dell'insegnante di Fisica, o visualizzare con un'applet su una LIM l'esperienza stessa. Questa fase di lavoro deve terminare con una tabella numerica che raccolga i pesi applicati e i relativi allungamenti della molla. Si osservi la diversa accezione di termini quali *lunghezza* e *allungamento*: nel caso di una molla di lunghezza iniziale l_0 e di costante di rigidità k soggetta a un peso, la lunghezza può essere espressa dalla funzione lineare $l = l_0 + kP$, mentre l'allungamento (differenza fra lunghezza della molla soggetta a peso e lunghezza in stato di quiete) si può esprimere con la relazione di proporzionalità diretta $\Delta l = l - l_0 = kP$.	10 minuti per la semplice formulazione del problema; 20 minuti se si presenta l'esperienza effettiva.
2	Gli studenti lavorano a piccoli gruppi omogenei (2/3) sulla tabella numerica di proporzionalità diretta attraverso una scheda di lavoro predisposta (Scheda 1).	1 ora
3	L'insegnante chiede prima agli studenti di riassumere quanto scritto sulla scheda al fine di stabilire insieme a loro le risposte corrette. Successivamente fornisce la definizione di proporzionalità diretta.	20 minuti
4	Gli studenti lavorano a coppie omogenee su un file di GeoGebra (Scheda 2) in cui la costante di proporzionalità è variabile, anche negativa.	30 minuti
5	Al termine il docente riassume e sistematizza i risultati appresi.	20 minuti

© De Agostini Scuola S.p.A. - Novara

percorsi_prop_diretta_blu.pdf

Eventuale approfondimento

- È possibile proporre agli studenti esempi in cui sia la variabile dipendente sia quella indipendente crescono, ma non sono direttamente proporzionali, facendoli lavorare a coppie omogenee su un file di GeoGebra (si veda la Scheda 3).
- È infine possibile lavorare su quesiti INVALSI relativi agli argomenti trattati.

Materiali di lavoro

- *Scheda 1 – Scheda di lavoro per lo studente*
- *Scheda 2 – Scheda di lavoro per lo studente*
- *Scheda 3 – Scheda di lavoro per lo studente*

• *Scheda 1 – Scheda di lavoro per lo studente*

Apri un file GeoGebra, lasciando attive la Vista Algebra e la Vista Grafica; dal menu Visualizza seleziona il Foglio di calcolo.
Riporta nelle colonne A e B del Foglio di calcolo i dati della tabella.
Analizza i dati della tabella: nella colonna C costruisci il rapporto fra ogni allungamento e il rispettivo peso applicato (esempio: B2/A2...).
Come sono i numeri che hai ricavato nella colonna C? Che cosa rappresentano nell'esperienza dell'allungamento della molla?

Sulla base di quanto hai ricavato sapresti completare la tabella seguente?

Pesi P	0.5	1	1.4	2	2.5	3.2		
Allungamenti Δl	0.75	1.5	2.1	3			7.5	12

Tabella 1 [1]

Completa la seguente frase:
conoscendo il coefficiente di rigidità k, l'allungamento Δl di una molla soggetta a un peso P si può ricavare ....; usando una formula $\Delta l =$ ....

Visualizza ora sul piano cartesiano la relazione Peso/Allungamento.
Dal menu principale seleziona Opzioni/Etichettatura/Nessun nuovo oggetto.
Torna al Foglio di calcolo; tenendo premuto il tasto sinistro del mouse seleziona le due colonne di dati.
Cliccando sulla selezione con il tasto destro del mouse Crea/Lista punti, le coppie di numeri della tabella numerica saranno trasformate in coordinate di punti rappresentati sul piano cartesiano.
Aggiusta la finestra grafica in modo da visualizzare tutti i punti della tabella.
Come sono disposti questi punti nel piano cartesiano?

In Vista Grafica riporta la formula da te ricavata in precedenza per rappresentare la relazione fra pesi P e allungamenti l.
Scrivi questa relazione nella Barra di inserimento, avendo cura di sostituire y a Δl e x a P; quale grafico viene rappresentato sul piano cartesiano?

© De Agostini Scuola S.p.A. - Novara

percorsi_prop_diretta_blu.pdf

[1] Nella *Tabella 1* si riprendono i valori eventualmente già inseriti nel corso dell'esperienza e si aggiungono quattro colonne con pesi o allungamenti indicati, scelti dal docente.

• *Scheda 2 – Scheda di lavoro per lo studente*

Apri un file GeoGebra, lasciando attive la Vista Algebra e la Vista Grafica.
Nella Barra di inserimento scrivi m = 2; digita quindi la funzione y = m*x.
Prendi un punto A sulla retta $y = m \cdot x$; visualizza le coordinate del punto (tasto destro del mouse sul punto, Proprietà, Mostra etichetta, Nome e valore).
Muovendo il punto sulla retta completa la seguente tabella:

$x(A)$	$y(A)$	$m = 2$
1		
–3		
	1	
	0	
	–2	

Cambia ora il valore di m; per farlo costruisci uno slider con le seguenti istruzioni: in Vista Algebra fai clic sul pallino a fianco di $m = 2$, il pallino diventerà azzurro e sul piano cartesiano comparirà uno slider che consentirà di far variare m.
Muovi lo slider e rispondi: come cambia il grafico? Se $m > 0$.............; se $m = 0$..............; se $m < 0$...............

Fissa sullo slider il valore $m = -1.5$ e aiutandoti anche con il grafico compila una tabella analoga alla precedente:

$x(A)$	$y(A)$	$m = -1.5$
1		
-3		
	1.5	
	0	
	-3	

Osserva $x(A)$ e $y(A)$. Al crescere di $x(A)$ il valore di $y(A)$ aumenta o diminuisce?
Se $x(A)$ triplica, come si comporta $y(A)$?
Secondo te con $m = -1.5$ si mantiene la relazione di proporzionalità diretta? Motiva la tua risposta.

© De Agostini Scuola S.p.A. - Novara

percorsi_prop_diretta_blu.pdf

Approfondimento

• *Scheda 3 – Scheda di lavoro per lo studente*

Analizza come variano le misure del perimetro e dell'area di un quadrato al variare della lunghezza del lato.
Immagina di avere un quadrato con il lato di lunghezza 0.5 cm.
Qual è il suo perimetro? .... cm.
Qual è la sua area? .... cm^2.
Aumenta ora la lunghezza del lato di 0.5 cm; il lato del quadrato ora è .... cm, il suo perimetro è .... cm e l'area .... cm^2.

All'aumentare della lunghezza del lato del quadrato, come si comportano perimetro e area? Aumentano, diminuiscono o rimangono uguali?

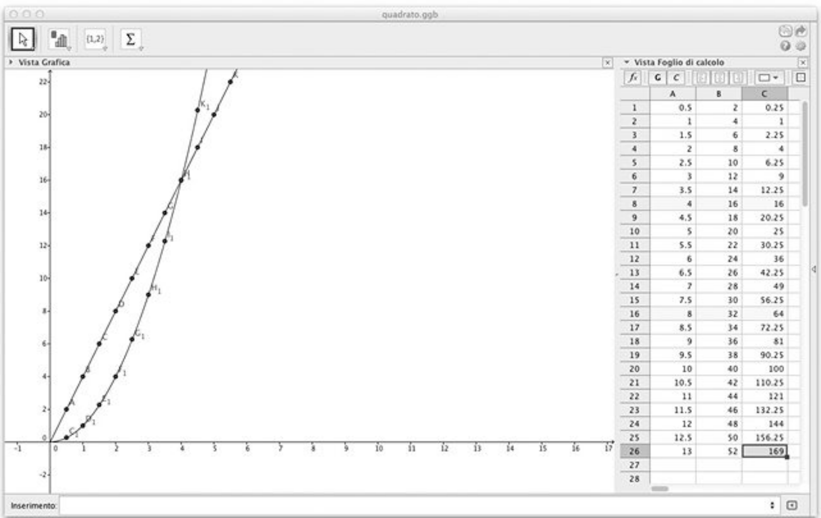
Riprendi ora la situazione con GeoGebra. Apri il file *quadrato.ggb*: nella colonna A della Vista Foglio di calcolo sono trascritti i valori, in centimetri, della lunghezza del lato del quadrato, ogni volta aumentati di 0.5 cm.
Imposta il foglio creando due formule in modo che:

- la prima formula calcoli, nella colonna B, il perimetro del quadrato a partire dalle misure inserite nella colonna A;
- la seconda calcoli, nella colonna C, l'area del quadrato a partire dalle misure inserite nella colonna A.

Osserva i valori così ottenuti e rispondi alle domande.

- All'aumentare della lunghezza del lato, come cambia il perimetro: aumenta, diminuisce o rimane sempre uguale? E l'area?
- Se il lato raddoppia, come cambia il perimetro? E l'area?
- Se il lato dimezza, come cambia il perimetro? E l'area?
- Se il lato triplica, come cambia il perimetro? E l'area?
- Se il lato diventa un terzo, come cambia il perimetro? E l'area?

Con il comando Crea Lista Punti rappresenta i valori in tabella nel grafico cartesiano, in modo da visualizzare la variazione del perimetro al variare del lato del quadrato e quella dell'area. Inserisci anche una funzione continua che leghi i punti. Quali analogie e quali differenze osservi tra i due grafici?
Puoi affermare che il perimetro è direttamente proporzionale alla lunghezza del lato del quadrato? Perché?
Puoi affermare che l'area del quadrato è direttamente proporzionale alla lunghezza del lato? Perché?



Esempio di videata Scheda 3

Nell'esempio sono segnate due celle in cui il lato raddoppia per evidenziare che, mentre il perimetro raddoppia, non è così per l'area del quadrato.

© De Agostini Scuola S.p.A. - Novara

percorsi_prop_diretta_blu.pdf

Quesiti INVALSI relativi agli argomenti trattati

Prova Nazionale 2009/10
Quesito D9

D9. Il prezzo p (in euro) di una padella dipende dal suo diametro d (in cm) secondo la seguente formula:

$$p = \frac{1}{15} d^2$$

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

		V	F
a.	Il prezzo della padella è direttamente proporzionale al suo diametro.	☐	☐
b.	Il prezzo della padella aumenta all'aumentare del suo diametro.	☐	☐
c.	Il rapporto fra il diametro della padella e il suo prezzo è 15.	☐	☐

Prova di Matematica Classe II scuola secondaria di secondo grado
Quesito D24

D24. La formula $l = l_0 + k \cdot P$ esprime la lunghezza l di una molla al variare del peso P applicato. l_0 rappresenta la lunghezza "a riposo" della molla; k indica di quanto si allunga la molla quando si applica un'unità di peso.
Quale delle formule elencate si adatta meglio alla seguente descrizione: "È una molla molto lunga e molto resistente alla trazione"?

a $l = 15 + 0.5 \cdot P$
b $l = 75 + 7 \cdot P$
c $l = 70 + 0.01 \cdot P$
d $l = 60 + 6 \cdot P$

© De Agostini Scuola S.p.A. - Novara

percorsi_prop_diretta_blu.pdf